Décomposition polaire

Théorème : L'application $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ définit un homéomorphisme.
$$(O, S) \longmapsto O.S$$

* L'application φ est bien définie (un produit de matrices inversibles l'est encore) et continue par continuité du produit matriciel.

* Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. ${}^tM.M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc par théorème spectral, ${}^tMM = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$. Posons $\Delta = \mathrm{diag}\sqrt{\lambda_i}$, $S = P\Delta{}^tP \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $O = MS^{-1}$. ${}^tOO = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ donc $O \in O_n(\mathbb{R})$.
$M = OS$ donc φ est <u>surjective</u>.

* Si $M = OS = O'S'$, alors $S^2 = {}^tMM = (S')^2$, comme ci-dessus.
Soit Q interpolateur tq $\forall i$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.
$S = P\Delta{}^tP = PQ(D){}^tP = Q(PD{}^tP) = Q({}^tMM) = Q(S'^2)$.
S' commute avec $Q(S'^2) = S$ donc S et S' sont codiagonalisables.
$S = R\,\mathrm{diag}(\lambda_i)R^{-1}$ et $S' = R\,\mathrm{diag}(\mu_i)R^{-1}$. Or $S^2 = S'^2$, donc $\forall i$, $\lambda_i^2 = \mu_i^2$
Puisque $S, S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\lambda_i > 0$ et $\mu_i > 0$, donc $\forall i$, $\lambda_i = \mu_i$: $S = S'$
De là $O = O'$, <u>φ est injective</u>.

* Si $(M_p = O_pS_p)_p \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge vers $M = OS \in GL_n(\mathbb{R})$, alors par compacité de $O_n(\mathbb{R})$, $O_{\phi(p)} \longrightarrow \tilde{O} \in O_n(\mathbb{R})$. Donc $S_{\phi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \tilde{O}^{-1}M$ par continuité de l'inverse. Posons $\tilde{S} = \tilde{O}^{-1}M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{+}(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Donc $M = \tilde{O}\tilde{S}$ mais par unicité de la décomposition polaire : $\tilde{O} = O$, $\tilde{S} = S$
De là, (O_p) n'a qu'une valeur d'adhérence dans $O_n(\mathbb{R})$ compact donc converge vers O, (S_p) vers S <u>φ^{-1} est continue</u>.

Corollaire : Si $G \overset{\text{compact}}{\leq} GL_n(\mathbb{R})$ contient $O_n(\mathbb{R})$, alors $G = O_n(\mathbb{R})$

Soit $M \in G$. Par le théorème, $M = OS$ donc $S \in G$, puis $\forall k \in \mathbb{Z}$, $S^k \in G$.
Si $\lambda \in Sp(S)$, alors $\lambda^k \in Sp(S^k)$, donc par compacité de G, $\{|\lambda|^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est borné. De plus, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\lambda = 1$. $S = I_n$, $M = O \in O_n(\mathbb{R})$.

Corollaire : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Soit $A = OS$ par le théorème précédent. $|||A|||_2 = |||S|||_2$ car $O_n(\mathbb{R})$ conserve la norme. Or il existe $B = (e_1, \dots, e_n)$ bon de $\vec{vp}$ de S pour les vp $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.
Si $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, alors $\|S(x)\| \leq \lambda_n\|x\|$ et la borne est atteinte pour e_n
donc $|||S|||_2 = \rho(S) = \lambda_n = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.